UNIVERSITE IBN ZOHR

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

AGADIR

Côntrole et stabilité des systèmes linéaires en dimension infinie

(Cours Master MASI)

Master

$$T(t+s) = T(t)T(s)$$

$$\int_0^\alpha \|CT(t)x\|^p dt \leq \gamma^p \|x\|^p$$

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$$

Année Universitaire 2017/2018

Prof. Said Hadd

CÔNTROLE ET STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES EN DIMENSION INFINIE

SAID HADD

Table des matières

Prof. Said Hadd
Faculté des Sciences d'Agadir, Département de Mathématiques, Université Ibn Zohr.
Année Universitaire: 2017-2018.

1. **Opérateurs d'observation admissibles**

1.1. **Problèmes de Cauchy.** Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et Z, U deux autre espaces de Banach tels que $Z \subset X$ densement et continument. Soient $A_m : Z \to X$ $G : Z \to U$ deux opérateurs linéaires tels que A_m est un opérateur fermé.

La plupart des équations aux dérivées partielles (EDP) prennent la forme abstraite suivante

$$\dot{z}(t) = A_m z(t), \quad z(0) = x, \quad Gz(t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Pour bien étudier ce genre de problème, il convient de transformer cette équation avec condition aux limites en un problème de Cauchy de la forme

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad z(0) = x, \qquad t > 0, \tag{1.2}$$

avec

$$A := (A_m)_{|D(A)}, \quad D(A) = \ker G.$$

Dans la suite de ce cours, nous supposons que A génère un semi-groupe fortement continu (C_0-semigroupe) $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X. Nous vous rappelons que la famille vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} &T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0, \\ &\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0. \end{aligned}$$

De plus, selon le théorème de Hille-Yosida, l'opérateur $(A, D(A))$ génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X tel que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour certaines constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ si et seulement si A est fermé, $D(A)$ est dense dans X, $\{\mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$, l'ensemble résolvant de A, et $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n}$ pour tout $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Il convient également de noter que,

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega,$$

et que

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ exists} \right\}, \\ Ax &= \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}. \end{aligned}$$

Sur $D(A)$ on defini une norme (de graphe)

$$\|x\|_1 := \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

Comme A est fermé, alors on peut montrer facilement que $X_1 := (D(A), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

Enfin, on rappel que la solution du problème de Cauchy (1.2) est donnée par

$$z(t) = T(t)x, \quad t \geq 0, \quad x \in X.$$

1.2. **Opérateurs admissibles d'observation.** Dans ce paragraphe nous cherchons à donner un sens au système d'observation suivant

$$(C,A) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & z(0) = x, \quad t \geq 0, \\ y(t) = Cz(t), & \qquad\qquad\;\; t \geq 0, \end{cases}$$

avec A engendre un C_0-semigroupe $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X et $C : D(A) \to U$ est un opérateur d'observation non-borné.

Definition 1.1. *Le système d'observation (C, A) est bien-posé si la fonction d'observation $t \mapsto y(t; x)$ s'etend en une fonction $y(\cdot; x) \in L^p([0, \alpha], U)$ for tout $\alpha > 0$ et pour un certain $p > 1$, et que*

$$\|y(\cdot; x)\|_{L^p([0,\alpha],U)} \leq \gamma \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Notons que si la condition initiale $x \in D(A)$, alors $y(t; x) = CT(t)x$ est bien définie pour tout $t \geq 0$, puisque le domaine $D(A)$ est stable par le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Dans la suite nous donnons une condition pour que le système (C, A) soit bien posé. Pour cela nous avons besoin de la définition suivante :

Definition 1.2. *On dit que $C \in \mathcal{L}(X_1, U)$ est un opérateur admissible d'observation pour A (ou juste (C, A) admissible) si pour un certain $\alpha > 0$, il existe une constante $\gamma := \gamma(\alpha) > 0$ telle que*

$$\int_0^\alpha \|CT(t)x\|^p dt \leq \gamma^p \|x\|^p \qquad (\forall x \in D(A)). \tag{1.3}$$

Il faut noter que si (C, A) est admissible pour un certain $\alpha > 0$, il est aussi admissible pour tout α. De plus si on pose

$$(\Psi x)(t) = CT(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \in [0, \alpha],$$

alors d'après l'estimation (1.3), on a $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, L^p([0, \alpha], U))$. Comme X_1 est dense dans X, alors on peut étendre Ψ à une application $\tilde{\Psi} \in \mathcal{L}(X, L^p([0, \alpha], U))$ avec

$$\|\tilde{\Psi} x\|_{L^p([0,\alpha],U)} \leq \gamma \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Cela signifie que

$$y(\cdot; x) = \tilde{\Psi} x = CT(\cdot)x, \qquad x \in D(A),$$
$$\tilde{\Psi} x \in L^p_{loc}([0, +\infty), U), \quad \forall x \in X.$$

Ainsi $\tilde{\Psi} x$ c'est l'extension de $y(\cdot; x)$. On a donc montrer le résultat suivant :

Theorem 1.3. *Si (C, A) est admissible alors le système (C, A) est bien posé.*

D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\lambda > \omega > \omega_0(A)$ (ici $\omega_0(A)$ est le type du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$), on a

$$\|CR(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{\frac{1}{q}}}.$$

Pour donner une représentation de la fonction d'observation $y(\cdot,x)$ pour $x \in X$, nous aurons besoin d'une extension de l'opérateur d'observation C.

Example 1.4. *Maintenant dans $E_p := L^p([-1,0],U)$ on défini l'opérateur suivant*

$$Qf = f', \quad D(Q) = \left\{ f \in W^{1,p}([-1,0],U) : f(0) = 0 \right\}. \tag{1.4}$$

Alors Q engendre un semi-groupe fortement continu dans E_p donné par : for tout $t \geq 0$,

$$(S(t)f)(\theta) = \begin{cases} 0, & -t \leq \theta \leq 0, \\ f(t+\theta), & -r \leq \theta \leq -t. \end{cases}$$

Soit $\mu : [-1,0] \to \mathcal{L}(U)$ une fonction à variations bornées et soit l'intégrale de Riemann-Stieljest $L : W^{1,p}([-1,0],U) \to U$,

$$Lf = \int_{-1}^{0} d\mu(\theta) f(\theta), \quad f \in W^{1,p}([-1,0],U).$$

Alors (L,Q) est admissible. En effet soit $f \in D(Q)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \|LS(t)f\|^p ds &\leq \int_0^\alpha \left(\int_{-1}^{-t} \|f(t+\theta)\| d|\mu|(\theta) \right)^p dt \\
&\leq \gamma^{\frac{p}{q}} \int_0^\alpha \int_{-1}^{-t} \|f(t+\theta)\|^p d|\mu|(\theta) dt \\
&\leq \int_{-1}^{0} \int_0^{-\theta} \|f(t+\theta)\|^p d|dt\mu|(\theta) \\
&\leq \gamma^p \|f\|_{E_p}
\end{aligned}$$

avec q est le conjugué de p et $\gamma := |\mu|([-1,0])$ (la mesure de l'intervalle $[-1,0]$ par la mesure de Borel $|\mu|$, c'est la variation totale de μ).

Example 1.5. *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach X. On suppose que $-A$ engendre un semigroup analytique dans $(T(t))_{t\geq 0}$ X. Donc les puissances fractionnaires de A vérifies, pour tout $\alpha > 0$*

$$\|A^\beta T(t)\| \leq \frac{M}{t^\beta}, \quad t > 0, \beta > 0.$$

On pose

$$C_\beta := \left(A^\beta\right)_{|D(A)} : D(A) \to X.$$

Alors c'est facile de vérifier que pour tout $\beta \in]0, \frac{1}{p}[$ on a $(C,-A)$ est admissible.

Definition 1.6. *L'extension de Yosida de l'opérateur $C : D(A) \to U$ est l'opérateur suivant :*

$$\begin{aligned}
D(C_\Lambda) &:= \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to +\infty} C\lambda R(\lambda, A)x \text{ exists in } U \right\} \\
C_\Lambda x &:= \lim_{\lambda \to +\infty} C\lambda R(\lambda, A)x
\end{aligned}$$

Comme $\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$, alors aussi vrai pour la norme du graphe, $\|\lambda R(\lambda, A)x - x\|_1 \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$,. Ceci implique que $D(A) \subset D(C_\Lambda)$ et $C_\Lambda x = Cx$ sur $D(A)$. On voit maintenanant que C_Λ est bien une extension de C.

Theorem 1.7. *Si (C, A) est admissible, alors on a $T(t)x \in D(C_\Lambda)$ pour presque tous $t > 0$, et pour tout $x \in X$. De plus, la fonction d'observation du système (C, A) est donnee par*

$$y(t; x) = (\tilde{\Psi}x)(t) = C_\Lambda T(t)x, \qquad p.p.\ t > 0, \quad \forall x \in X. \tag{1.5}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \rho(A)$, et $x \in X$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \|C\lambda R(\lambda, A)T(t)x\|^p dt &= \int_0^\alpha \|CT(t)\lambda R(\lambda, A)x\|^p dt \\ &\leq \gamma^p \|\lambda R(\lambda, A)x\|^p.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Donc $\lambda, \mu \in \rho(A)$, et $x \in X$, on a aussi

$$\|C\lambda R(\lambda, A)T(\cdot)x - C\mu R(\mu, A)T(\cdot)x\|_{L^p([0,\alpha],U))} \leq \gamma \|\lambda R(\lambda, A)x - \mu R(\mu, A)x\|.$$

Comme $\lambda R(\lambda, A)x \to x$ quand $\lambda \in +\infty$, alors $(CnR(n, A)T(\cdot)x)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^p([0, \alpha], U)$. Ainsi elle admet une sous-suite qui converge persque partout dans U. Autrement dit $Cn_kR(n_k, A)T(t)x$ converge presque pour tout $t > 0$ quand $k \to \infty$. D'où $T(t)x \in D(C_\Lambda)$ p.p. $t > 0$. Par passage a la limit dans (1.6), on a

$$\int_0^\alpha \|C_\Lambda T(t)x\|^p dt \leq \gamma^p \|x\|^p \qquad (\forall x \in X).$$

Donc l'application $\Xi x := C_\Lambda T(\cdot)x$ est linéaire bornée de X dans $L^p([0, \alpha], U)$. Maintenant, comme $\Xi = \tilde{\Psi}$ sur $D(A)$, alors par densité on aussi $\Xi = \tilde{\Psi}$ sur X. $\square$

1.3. **Admissibilité d'observation pour les semigroupes perturbés.** Soient $A : D(A) \subset X \to X$ un générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ dans X, $P : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire tel que (P, A) est admissible. Donc $A^P = A + P : D(A) \subset X \to X$ est un générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T^P(t))_{t \geq 0}$ dans X tel que pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned}&T^p(t)x \in D(P_\Lambda), \quad a.e.\ t > 0, \\ &\int_0^\alpha \|P_\Lambda T^P(s)x\|^p ds \leq c^p \|x\|^p, \\ &T^P(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)P_\Lambda T^P(s)x ds, \qquad t \geq 0,\end{aligned} \tag{1.7}$$

avec P_Λ est l'extension de Yosida de P pour A, voir le cours de Master [2].

Proposition 1.8. *Si (C, A) est admissible, alors for tout $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ et tout $\alpha > 0$, il existe une constant $c := c(\alpha) \to 0$ quand $\alpha > 0$ independent de f telle que*

$$(T * f)(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds \in D(C_\Lambda),$$
$$\|C_\Lambda(T * f)\|_{L^p([0,\alpha],Y)} \leq c(\alpha)\|f\|_{L^p([0,\alpha],X)},$$

avec C_Λ est l'extension de Yosida de C pour A.

Theorem 1.9. *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X, et $P : D(A) \subset X \to X$ tel que (P, A) est admissible. Alors $C : D(A) \subset X \to Y$, Y un espace de Banach, on a (C, A) admissible si et seulement si (C, A^P) est admissible. De plus les extensions de Yosida de C pour A et A^P sont reliées par $D(P_\Lambda) \cap D(C_{\Lambda,A}) \subset D(C_{\Lambda,A^P})$ et*

$$C_{\Lambda,A} = C_{\Lambda,A^P} \quad \textit{sur} \quad D(P_\Lambda) \cap D(C_{\Lambda,A})$$

Démonstration. On suppose que (C, A) est admissible, donc pour $\alpha > 0$, il existe une constante $\gamma := \gamma(\alpha) > 0$ telle que pour $x \in D(A)$, on a

$$\|CT(\cdot)x\|_{L^p([0,\alpha],Y)} \leq \gamma\|x\|.$$

D'autre part, par (1.7) et Proposition 1.8 on a

$$\begin{aligned}
\|CT^P(\cdot)x\|_{L^p([0,\alpha],Y)} &= \|CT(\cdot)x + C(T * P_\Lambda T^P(\cdot)x)\|_{L^p([0,\alpha],Y)} \\
&\leq \|CT(\cdot)x\|_{L^p([0,\alpha],Y)} + \|C(T * P_\Lambda T^P(\cdot)x)\|_{L^p([0,\alpha],Y)} \\
&\leq (1 + c\alpha^{\frac{1}{q}})\gamma\|x\|.
\end{aligned}$$

Ainsi (C, A^P) est admissible. Inversement, supposons que (C, A^P) est admissible. Comme $A = A^P + (-P)$ et $(-P, A^P)$ est admissible (voir (1.7)), on a d'après le premier cas (C, A) est admissible.
De plus, pour $\lambda > \max(\omega_0(A), \omega_0(A^P))$ assez grand (donc $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A^P)$), on a

$$R(\lambda, A^P) = R(\lambda, A) + R(\lambda, A^P)PR(\lambda, A).$$

Soit $x \in D(P_\Lambda) \cap D(C_{\Lambda,A})$ alors on a

$$\begin{aligned}
\|C\lambda R(\lambda, A^P)x - C\lambda R(\lambda, A)x\| &= \|CR(\lambda, A^P)P\lambda R(\lambda, A)\| \\
&\leq \|CR(\lambda, A^P)\|\|P\lambda R(\lambda, A)x\| \\
&\leq \frac{\kappa}{(\lambda - \omega)^{\frac{1}{q}}}(\|P\lambda R(\lambda, A)x - P_\Lambda x\| + \|P_\Lambda x\|).
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} C\lambda R(\lambda, A^P)x = \lim_{\lambda \to +\infty} C\lambda R(\lambda, A)x = C_\Lambda x.$$

D'où le rèsultat. □

2. **Opérateurs admissible de contrôle**

Dans ce chapitre X, Z et U sont des espace de Banach tel que $Z \subset X$ est une injection dense et continue.

2.1. **Espaces d'extrapolations.** Soit $A : D(A) \subset X \to X$ le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X tel que $\|T(t)\| \leq Me^{omt}$ pour tout $t \geq 0$, et certaines constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$. On définit une nouvelle norme sur X, par

$$\|x\|_{-1} := \|R(\beta, A)x\|, \quad x \in X, \quad \beta \in \rho(A).$$

Cette norme est indépendante du choix de β, selon l'équation de la résolvante. On pose

$$X_{-1} := \overline{X}^{\|\cdot\|_{-1}},$$

le complété de X pour la norme $\|\cdot\|_{-1}$. Cet espace est appelé l'espace d'extrapolation. Il est évident que nous avons les injections denses et continues suivantes

$$X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_{-1}.$$

Pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\|T(t)x\|_{-1} &= \|R(\beta, A)T(t)x\| = \|T(t)R(\beta, A)x\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|T(t)R(\beta, A)x\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|x\|_{-1}.\end{aligned}$$

Maintenant, par densité, on peut etendre $(T(t))_{t\geq 0}$ en un semi-groupe fortement continu $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ dans X_{-1} de générateur $A_{-1} : X \to X_{-1}$, l'extension de A à X. Ce semi-groupe est appelé le semi-groupe d'extrapolation.

2.2. **Contrôle au bord.** Soit le système de control suivant

$$\begin{cases}\dot{z}(t) = A_m z(t), & z(0) = x, \quad t > 0, \\ Gz(t) = u(t), & \qquad\qquad\; t \geq 0,\end{cases} \tag{2.1}$$

avec $u : [0, +\infty) \to U$ est la fonction de contrôle et les opérateurs linéaires A_m et G sont tels que

- **(H1)** $A_m : Z \to X$ est fermé et $A := (A_m)_{|D(A)}$ avec $D(A) = \ker G$ est un générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ dans X.
- **(H2)** $G : Z \to U$ est opérateur linéaire surjective.

Definition 2.1. *Le système* (2.1) *est bien posé si pour tout* $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$, *il admet une solution* $z \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, X)$.

Lemma 2.2. *Sous les conditions* **(H1)** *et* **(H2)** *on a la somme direct suivante*

$$Z = D(A) \oplus \ker(\lambda - A_m), \qquad \lambda \in \rho(A).$$

Selon le Lemme 2.2, l'inverse suivant existe

$$D_\lambda := \left(G_{|\ker(\lambda - A_m)}\right)^{-1} : U \to \ker(\lambda - A_m), \qquad \lambda \in \rho(A). \tag{2.2}$$

A cause de l'équation de la résolvante, D_λ ne dépend pas du choix de λ et il est appelé l'*opérateur de Dirichlet*. De plus on a

$$D_\lambda \in \mathcal{L}(U, Z), \qquad \lambda \in \rho(A).$$

On définit un opérateur de contrôle B par

$$B := (\lambda - A_{-1})D_\lambda : U \to X_{-1}$$

Lemma 2.3. *Sous les conditions* **(H1)** *et* **(H2)** *on a*

$$A_m = (A_{-1} + BG)_{|Z}.$$

Selon le Lemme 2.3, le problème au bord (2.1) prend la forme distribuée suivante :

$$(A, B) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & t \geq 0, \\ z(0) = x. \end{cases}$$

Ainsi le system (2.1) est bien posé si et seulement si le système (A, B) est bien posé. Remarquons que la solution intégrale du système (A, B) est donnée par

$$z(t) = T(t)x + \int_0^t T_{-1}(t - s)Bu(s)ds$$

for tout $t \geq 0,\ x \in X$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$. De plus $z(t) \in X_{-1}$, ce qui nous oblige à chercher d'autres conditions pour forcer la solution à prendre des valeurs dans l'espace d'état X. Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante :

Definition 2.4. *On suppose que les conditions* **(H1)** *et* **(H2)** *sont vérifiées. On dit que* (A, B) *est bien posé si il existe* $\tau > 0$ *tel que*

$$\Phi_\tau u := \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds \in X$$

pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$.

Remarque que si (A, B) est admissible, alors pour tout $t \geq 0$, on a $\Phi_t u \in X$ pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$. En effet, on suppose que il existe $\tau > 0$ tel que $\Phi_\tau u \in X$. Soit $t \in (0, \tau)$ et pose

$$v(s) = \begin{cases} u(s), & s \in [0, t], \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Donc on a $\Phi_t u = \Phi_\tau v \in X$. Maintenant, on suppose que $t > \tau$. Alors, d'après la relation de chasles on a

$$\begin{aligned}
\Phi_{2\tau} u &= T(\tau)\Phi_\tau u + \int_\tau^{2\tau} T_{-1}(2\tau - s)Bu(s)ds \\
&= T(\tau)\Phi_\tau u + \int_0^{\tau} T_{-1}(\tau - s)Bu(\tau + s)ds \\
&= T(\tau)\Phi_\tau u + \Phi_\tau u(\tau + \cdot) \in X.
\end{aligned}$$

Donc d'après le premier cas, on a $\Phi_t u \in X$ pour tout $t \in [0, 2\tau]$. De la même façon, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on $\Phi_{2^n\tau} u \in X$, ce qui donne $\Phi_t u \in X$ pour tout $t \in [0, 2^n\tau]$. Ainsi $\Phi_t u \in X$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. D'autre part, on a

$$\Phi_t \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^+, U), X), \qquad \forall t \geq 0.$$

Alors on a ainsi démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.5. *Si (A, B) est admissible, alors le système (2.1) est bien posé.*

Soit une $u : \mathbb{R}^+ \to U$ une fonction de contrôle telle que sa transformée de Laplace $\hat{u}$, alors

$$\widehat{\Phi_\bullet u}(\lambda) = R(\lambda, A_{-1})B\hat{u}(\lambda) = D_\lambda \hat{u}(\lambda).$$

Example 2.6. *On conisdère le système suivant*

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,\theta) = \dfrac{\partial v}{\partial \theta}(t,\theta), & (t,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [-1, 0], \\
v(0,\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-1, 0], \\
v(t, 0) = u(t), & t \geq 0,
\end{cases} \tag{2.3}$$

pour l'état initiale $\varphi \in L^p([-1,0], U)$ et la fonction contrôle au bord $u : \mathbb{R}^+ \to U$. Dans ce cas, on prend

$$X = L^p([-1,0], U), \quad Z = W^{1,p}([-1,0], U), \quad A_m = \frac{d}{d\theta} : Z \to X, \quad G\varphi = \varphi(0).$$

Remarquons que $A = A_m$ with domain $D(A) = \ker G$ engendre le semi-groupe de translation à gauche dans X donné par

$$(T(t)\varphi)(\theta) = \begin{cases} 0, & -t \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(t+\theta), & -r \leq \theta \leq -t, \end{cases}$$

pour tout $t \geq 0$ et $\varphi \in X$. Ainsi les opérateurs A_m et G vérifient les conditions **(H1)** *et* **(H2)**. *Calculons l'opérateur de Dirichlet associé au système (2.3). Soit $z \in U$ et cherchons un unique $\varphi \in \ker(\lambda - A_m)$ tel que $G\varphi = z$ ($\varphi \in W^{1,p}([-1,0], U)$ avec $\varphi(0) = 0$). D'autre part, $\varphi \in \ker(\lambda - A_m)$ équivalent à $\varphi' = \lambda\varphi$, et donc $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta}\varphi(0) = e^{\lambda\theta}z$. On définit*

$$e_\lambda : U \to L^p([-1,0], U), \quad z \mapsto e_\lambda z = e^{\lambda \cdot} z.$$

Donc $D_\lambda = e_\lambda$*, et donc* $R(\lambda, A_{-1})B = e_\lambda$*. Remarquons que la fonction*

$$v(t,\theta) = \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ \varphi(t+\theta), & t+\theta \leq 0, \end{cases}$$

satsifait le système (2.3)*. Dans la suite on note cette fonction par* $u_t(\theta) = v(t,\theta)$*. Ainsi on a*

$$u_t(\theta) = (T(t)\varphi)(\theta) + \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

On pose

$$(\mathscr{R}_t u)(\theta) := \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}.$$

On a alors $u_t = T(t)\varphi + \mathscr{R}_t u$*. D'autre par* $\widehat{\mathscr{R}_\bullet u}(\lambda) = e_\lambda \hat{u}(\lambda) = \widehat{\Phi_\bullet u}(\lambda)$*. Par injectvité la transformée de Laplace on a*

$$(\Phi_t u)(\theta) := \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}.$$

Ce qui montre que $\Phi_t u \in X$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$*. Donc* (A,B) *est admissible et par suite le problème au bord* (2.3) *est bien posé.*

3. **Systèmes linéaires en dimension infinie**

Dans ce chapitre nous considerons un système linéaire avec entré et sortie de la forme

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_m z(t), & z(0) = x, \quad t > 0, \\ Gz(t) = u(t), & t \geq 0, \\ y(t) = \mathscr{C} z(t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $A_m : Z \to X$, $G : Z \to U$ satisfont les conditions **(H1)** et **(H2)** (voir chapitre 2), et $\mathscr{C} : Z \to U$ un opérateur linéaire.

3.1. **Systèmes linéaires bien posés au sens de Salamon-Weiss.**

Le but de ce paragraphe est de donner un sens au système entré-sortie (3.1).

Definition 3.1. *Le système* (3.1) *est bien posé s'il admet une solution* $z \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, X)$ *et sa fonction d'observation* $y(\cdot; x, u)$ *admet une extension satisfaite : pour* $\alpha > 0$, *il existe une constante* $c := c(\alpha) > 0$ *telle que*

$$\|y(\cdot; x, u)\|_{L^p([0,\alpha],U)} \leq c \left(\|x\| + \|u\|_{L^p([0,\alpha],U)} \right)$$

pour tout $(x, u) \in X \times L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, U)$.

Pour étudier le système (3.1), posons

$$C := \mathscr{C}_{|D(A)} : D(A) \to U.$$

D'après le chapitre 2, sous les conditions **(H1)** et **(H2)**, le système (3.1) peut se transformer comme suit

$$(A, B, C) \qquad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & z(0) = x, \quad t \geq 0, \\ y(t) = Cz(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Dans la suite on suppose que (A, B) est admissible. La solution du systèmè (A, B, C) est donner par

$$z : \mathbb{R}^+ \to X, \quad t \mapsto z(t) = T(t)x + \Phi_t u,$$

pour tout $t \geq 0$ and $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$ (voir le chapitre 2).

Maintenant pour étudier la fonction d'observation $t \mapsto y(t; x, u)$ pour tout $x \in X$ et $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, U)$, nous avons besoin de l'espace suivant :

$$W^{1,p}_{0,\alpha}(U) := \left\{ u \in W^{1,p}([0, \alpha], U) : u(0) = 0 \right\}, \qquad \alpha > 0.$$

Il est connu que l'espace $W^{1,p}_{0,\alpha}(U)$ est dense dans l'espace de Lebesgue $L^p([0, \alpha], U)$. De plus pour $u \in W^{1,p}_{0,t}(U)$, et par intégration par parties (ici sans perdre de génralitées, on suppose que $0 \in \rho(A)$, et donc on a $B = (-A_{-1})D_0$)

$$\begin{aligned}
\Phi_t u &= \int_0^t T_{-1}(t-s)(-A_{-1})D_0 u(s)ds \\
&= [T(t-s)D_0 u(s)]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t T(t-s)D_0 u(s)ds \\
&= D_0 u(t) - \int_0^t T(t-s)D_0 u(s)ds \\
&= D_0 u(t) - R(0,A)D_0 u(t) + \int_0^t T(t-s)R(0,A)D_0 \dot{u}(s)ds \\
&= D_0 u(t) - R(0,A)\left(D_0 u(t) + \int_0^t T(t-s)D_0 \dot{u}(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\Phi_t u \in Z$ pour tout $t \geq 0$ et $u \in W^{1,p}_{0,t}(U)$. Par suite on peut écrire

$$y(t;x,u) = CT(t)x + \mathscr{C}\Phi_t u, \quad (x,u) \in D(A) \times W^{1,p}_{0,t}(U).$$

On pose

$$(\mathbb{F}u)(t) := \mathscr{C}\Phi_t u, \qquad t \geq 0, \quad u \in W^{1,p}_{0,t}(U).$$

On a alors

$$y(t;x,u) = CT(t)x + (\mathbb{F}u)(t), \quad (x,u) \in D(A) \times W^{1,p}_{0,t}(U).$$

Definition 3.2. *On dit que le triplet (A,B,C) est admissible si (A,B) et (C,A) sont admissible et que pour $\alpha > 0$, il existe $\kappa := \kappa(\alpha) > 0$ telle que*

$$\|\mathbb{F}u\|_{L^p([0,\alpha],U)} \leq \kappa \|u\|_{L^p([0,\alpha],U)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_{0,\alpha}(U).$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Si (A,B,C) est admissible alors le système (3.1) est bien posé.*

Démonstration. Let $\lambda > 0$ et $(x,u) \in D(A) \times W^{1,p}_{0,\alpha}(U)$. Comme (C,A) est admissible alors il existe $\gamma := \gamma(\alpha) > 0$ tel que

$$\|CT(\cdot)x\|_{L^p([0,\alpha],U)} \leq \gamma \|x\|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|y(\cdot;x,u)\|_{L^p([0,\alpha],U)} &= \|CT(\cdot)x + \mathbb{F}u\|_{L^p([0,\alpha],U)} \\
&\leq \gamma\|x\| + \kappa\|u\|_{L^p([0,\alpha],U)} \\
&\leq c\left(\|x\| + \|u\|_{L^p([0,\alpha],U)}\right),
\end{aligned}$$

avec $c = \max\{\gamma, \kappa\}$. Ainsi le résultat suit par densité. □

L'operateur $\mathbb{F} \in \mathcal{L}(L^p([0,\alpha],U))$ est appelé *l'opérateur entré-sorti* du système (A,B,C) (ou de (3.1)).

Dans la suite nous allons définir une sous classe importante des système bien poés au sens de Salamon-Weiss.

Definition 3.4. *On supposos que* (A, B, C) *est admissible et soit* $\mathbb{F}$ *l'opérateur entré-sorti associé. On dit que* (A, B, C) *est régulier (avec un feedthrough zéro) si la limite suivante existe dans* U :

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\mathbb{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} v))(s) ds = 0$$

pour tout vecteur constant $v \in U$.

Le théorème suivant suivant du a Weiss [7] est admis

Theorem 3.5. *On suppose que* (A, B, C) *est régulier. Alors pour toute condition inintial* $x \in X$ *et toute fonction de contrôle* $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$, *le système* (3.1) *admit une unique solution* $z : \mathbb{R}^+ \to X$ *telle que* $z(t; x, u) \in D(C_\Lambda)$ *pour presque tout* $t > 0$. *De plus la fonction d'observation du système est représentée comme suit :*

$$y(t; x, u) = C_\Lambda z(t; x, u)$$

pour presque tout $t > 0$. *En particulier, on a* $\Phi_t u \in D(C_\Lambda)$ *et* $(\mathbb{F}u)(t) = C_\Lambda \Phi_t u$ *pour presque tout* $t > 0$. *Dana ce cas, si la transformation de Laplace* $\hat{u}$ *existe, alors celle de* $\mathbb{F}u$ *existe aussi et est donnée par*

$$\widehat{\mathbb{F}u}(\lambda) = C_\Lambda R(\lambda, A_{-1}) B \hat{u}(\lambda).$$

La fonction $\mathscr{H}(\lambda) = C_\Lambda R(\lambda, A_{-1}) B : \rho(A) \to \mathcal{L}(U)$ *est appelée la fonction de transfère du système* (A, B, C).

On peut montrer que la fonction transfère du système (A, B, C) et elle est aussi donnée par

$$\mathscr{H}(\lambda) = \mathscr{C}\mathbb{D}_\lambda, \qquad \lambda \in \rho(A).$$

3.2. **Exemple d'un système de transport régulier au sens de Weiss.** On considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(t, \theta), \quad v(0, \theta) = \varphi(\theta), & (t, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [-1, 0], \\ v(t, 0) = u(t), & t \geq 0, \\ y(t) = \int_{-1}^0 d\mu(\theta) v(t, \theta), & t \geq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

pour l'état initiale $\varphi \in L^p([-1, 0], U)$, la fonction contrôle au bord $u : \mathbb{R}^+ \to U$, et $\mu : [-1, 0] \to \mathcal{L}(U)$ est une fonction à variations bornées continue et nulle en 0 (donc la variation total $|\mu|$ de μ qui est une mesure positive de Borel satisfait $|\mu|([-\varepsilon, 0]) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$). Dans ce cas, on prend

$$X = L^p([-1, 0], U), \quad Z = W^{1,p}([-1, 0], U), \quad A_m = \frac{d}{d\theta} : Z \to X, \quad G\varphi = \varphi(0).$$

De plus on définit $\mathscr{C} : Z \to X$ par

$$\mathscr{C}\varphi = \int_{-1}^0 d\mu(\theta) \varphi(\theta).$$

Remarquons que $A = A_m$ with domain $D(A) = \ker G$ engendre le semi-groupe de translation à gauche dans X donné par

$$(T(t)\varphi)(\theta) = \begin{cases} 0, & -t \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(t+\theta), & -r \leq \theta \leq -t, \end{cases}$$

pour tout $t \geq 0$ et $\varphi \in X$. Ainsi les opérateurs A_m et G vérifient les conditions **(H1)** et **(H2)**. Calculons l'opérateur de Dirichlet associé au système (3.2). Soit $z \in U$ et cherchons un unique $\varphi \in \ker(\lambda - A_m)$ tel que $G\varphi = z$ ($\varphi \in W^{1,p}([-1,0],U)$ avec $\varphi(0) = 0$). D'autre part, $\varphi \in \ker(\lambda - A_m)$ équivalent à $\varphi' = \lambda\varphi$, et donc $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta}\varphi(0) = e^{\lambda\theta}z$. On définit

$$e_\lambda : U \to L^p([-1,0],U), \quad z \mapsto e_\lambda z = e^{\lambda \cdot} z.$$

Donc $D_\lambda = e_\lambda$. On pose

$$B := (\lambda - A_{-1})e_\lambda, \quad \lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}.$$

Donc $R(\lambda, A_{-1})B = e_\lambda$. Remarquons que la fonction

$$v(t,\theta) = \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ \varphi(t+\theta), & t+\theta \leq 0, \end{cases}$$

satsifait le système (2.3). Dans la suite on note cette fonction par $u_t(\theta) = v(t,\theta)$. Ainsi on a

$$u_t(\theta) = (T(t)\varphi)(\theta) + \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

On pose

$$(\mathscr{R}_t u)(\theta) := \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}.$$

On a alors $u_t = T(t)\varphi + \mathscr{R}_t u$. D'autre par $\widehat{\mathscr{R}_\bullet u}(\lambda) = e_\lambda \hat{u}(\lambda) = \widehat{\Phi_\bullet u}(\lambda)$. Par injectvité la transformée de Laplace on a

$$(\Phi_t u)(\theta) := \begin{cases} u(t+\theta), & t+\theta \geq 0, \\ 0, & t+\theta \leq 0. \end{cases}.$$

Ce qui montre que $\Phi_t u \in X$ pour tout $t \geq 0$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^+, U)$. Donc (A,B) est admissible. De plus si on pose $C := \mathscr{C}_{|D(A)}$, alors d'après le chapitre 1, (C,A) est admissible. Pour $\alpha \in (0,1)$ et $u \in W^{1,p}_{0,\alpha}(U)$, on a pour tout $t \in [0,\alpha]$,

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{F}u)(t)\| = \|\mathscr{C}\Phi_t u\| &= \left\| \int_{-t}^0 d\mu(\theta) u(t+\theta) \right\| \\ &\leq \int_{-t}^0 \|u(t+\theta)\| d|\mu|(\theta). \end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Hölder, puis Fibini théorème, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha \|(\mathbb{F}u)(t)\|^p dt &\le |\mu|([-\alpha,0])^{\frac{p}{q}} \int_0^\alpha \int_{-t}^0 \|u(t+\theta)\|^p d|\mu|(\theta) dt \\
&\le |\mu|([-\alpha,0])^{\frac{p}{q}} \int_{-\alpha}^0 \int_{-\theta}^\alpha \|u(t+\theta)\|^p dt d|\mu|(\theta) \\
&\le |\mu|([-\alpha,0])^{\frac{p}{q}} \int_{-\alpha}^0 \int_0^{\alpha+\theta} \|u(\sigma)\|^p d\sigma d|\mu|(\theta) \\
&\le |\mu|([-\alpha,0])^{\frac{p}{q}} \int_{-\alpha}^0 \|u\|^p_{L^p([0,\alpha],U)} d|\mu|(\theta) \\
&= |\mu|([-\alpha,0])^p \|u\|^p_{L^p([0,\alpha],U)}.
\end{aligned}$$

Ainsi (A,B,C) est admissible. Montrons que c'est aussi un triple régulier. En effet, soit $u_0 \in U$, alors et $\tau \in (0,1)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\mathbb{F}(1_{\mathbb{R}^+} u_0))(s) ds \right\| &\le \frac{1}{\tau} \tau^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\tau \|(\mathbb{F}(1_{\mathbb{R}^+} u_0))(s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{1}{\tau} \tau^{\frac{1}{q}} |\mu|([-\tau,0]) \|1_{\mathbb{R}^+} u_0\|_{L^p([0,\alpha],U)} \\
&= \frac{1}{\tau} \tau^{\frac{1}{q}} |\mu|([-\tau,0]) \tau^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_U \\
&= |\mu|([-\tau,0]) \|u_0\|_U \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Références

[1] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics, 194, Springer-Verlag, 2000.

[2] S. Hadd, *Théorie de Semi-groupes*, Cours de Master MASI, Université Ibn Zohr, Agadir, Maroc 2018.

[3] S. Hadd and A. Idrissi, *On the admissibility of observation for perturbed C_0-semigroups on Banach spaces*, Systems & Control Letters, 55 (2006), 1-7.

[4] M. Tucsnak and G. Weiss, *Observation and Control for Operator Semigroups*, Birkhäuser, 2009.

[5] G. Weiss, *Admissible observation operators for linear semigroups*, Israel Journal of Mathematics 65 (1989), 17-43.

[6] G. Weiss, *Admissibility of unbounded control operators,* SIAM J. Control Optim., 27 (1989) 527–545.

[7] G. Weiss, *Regular linear systems with feedback,* Math. Control Signals Sys., 7 (1994), pp. 23–57.

(Said Hadd) Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ibn Zohr University, Hay Dakhla, B.P. 8106, 80000 Agadir, Morocco

Email address: s.hadd@uiz.ac.ma